УДК 519.71:622.3

ИНТЕГРИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДОБЫЧИ НЕФТИ С УЧЕТОМ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Д.В. Севостьянов

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: SVL@mail.tomsknet.ru

Рассматривается задача прогноза добычи нефти и оценки извлекаемых запасов с учетом дополнительной априорной информации и экспертных оценок технологических параметров разработки месторождений. Приводятся результаты анализа точности оценок в зависимости от числа лет разработки.

Введение

В последние годы в нефтяной промышленности в связи с широким внедрением информационных систем, современных технологий исследования скважин, систем регистрации разнообразной информации о состоянии объектов разработки, скважин, нефтяных пластов и месторождений возрос интерес к задачам построения математических моделей процессов нефтегазодобычи [1–6].

Проблемы построения математических моделей процессов нефтегазодобычи связаны с решением задач идентификации, которые часто называют обратными задачами. Задача идентификации заключается в построении оптимальных, в смысле заданных критериев качества, математических моделей технологических параметров разработки (добычи нефти, жидкости, воды, пластовых давлений, обводненности продукции и т. д.) с использованием промысловых данных, результатов комплексных исследований скважин и нефтяных пластов. Задачи идентификации технологических параметров подразделяют на два крупных направления, имеющие свои цели и задачи.

Первое направление представляет задачи уровня проектирования разработки нефтяных месторождений, которые решаются крупными коллективами в научных центрах нефтяных компаний, проектных институтах [6]. На стадии проектирования разработки месторождения создаются цифровые геолого-технологические модели нефтяных месторождений, позволяющие прогнозировать показатели разработки на достаточно длительный период (20–30 лет), создавать технологические схемы и проекты разработки, определять стратегию развития компании.

Второе направление представляют задачи идентификации уровня мониторинга и оперативного управления разработкой нефтяных месторождений. На стадии разработки месторождений актуальным является моделирование технологических параметров для оперативного решения задач прогнозирования добычи нефти, оценки эффективности геолого-технических мероприятий, определения оптимальных режимов работы скважин и т. п.

Здесь более мобильными, легко адаптируемыми (настраиваемыми) на основе промысловых данных и результатов исследований скважин по сравнению с геолого-технологическими моделями уровня проектирования являются различные регрессионные статические и динамические модели технологических параметров разработки. Наиболее широкое применение получили промыслово-технологические модели, основанные на характеристиках вытеснения, уравнениях фильтрации флюидов, малопараметрических регрессионных моделях добычи нефти, жидкости и воды [7, 8].

Однако реальные условия нефтегазодобычи характеризуются неполнотой, неоднородностью, недостаточностью исходных данных о фильтрационных параметрах и энергетическом состоянии нефтяных пластов, различными ошибками регистрации технологических и геологических параметров разработки, неадекватностью моделей и т. п. [1–5]. В данных условиях использование классических методов идентификации технологических параметров разработки часто связано с проблемами устойчивости и низкой точностью получаемых решений [5].

Перспективным направлением преодоления реально существующей сложности процессов нефтегазодобычи, недостаточности данных, повышения точности и устойчивости решений, является использование интегрированных систем идентификации с учетом разного рода дополнительной априорной информации, накопленного опыта и знаний [9, 10].

Интегрированные системы идентификации предоставляют возможность объединять математические (физически содержательные) модели технологических параметров разработки месторождений и формализованные экспертные оценки лица, принимающего решения, в единую интегрированную систему моделей, отражающую целостные свойства реальных систем, что дает интегральный (синергетический) эффект при решении разнообразных задач идентификации и управления [11].

Данная работа является развитием технологии интегрированных моделей при идентификации одного из важных технологических параметров разработки месторождений – добычи нефти с использованием малопараметрических регрессионных моделей отбора нефти и непараметрического метода аналогов [10] в условиях априорной неопределенности о статистических характеристиках дополнительных априорных данных и экспертных оценок.

Интегрированные модели и алгоритмы идентификации добычи нефти

Рассмотрим интегрированную систему моделей добычи нефти на основе малопараметрической модели, отражающей эволюцию текущего отбора нефти во времени, с учетом дополнительной априорной информации об извлекаемых запасах, параметрах модели добычи нефти и прогнозных значениях добычи, которую представим в удобном для исследований матричном виде:

$$\begin{cases} Q_н^* = Q_н(\alpha) + \xi, \\ \bar{S} = s(T,\alpha) + \eta = \int_0^T f(\tau,\alpha)d\tau + \eta, \\ \bar{\alpha}_l = \alpha + \nu_l, \quad l = 1...d, \\ \bar{Q}_н = Q(\tau,\alpha) + \varepsilon, \end{cases} \qquad (1)$$

где $Q_н^*=(Q^*(t_i), i=1...n)$, $Q_н(\alpha)=(f(t_i,\alpha), i=1...n)$ – векторы значений добычи нефти, полученные в процессе разработки месторождения и на основе модели $f(t,\alpha)$ за соответствующие промежутки времени $\Delta t=t_i-t_{i-1}$, $i=1...n$ (год, месяц); $\bar{S}=(\bar{s}_j, j=1...p)$, $\bar{\alpha}_l=(\bar{\alpha}_{jl}, j=1...m)$, $l=1...d$, $\bar{Q}_н=(\bar{Q}_н(t_n+\tau_j), j=1...r)$ – векторы экспертных оценок извлекаемых запасов нефти за время разработки T, дополнительных априорных данных о параметрах модели добычи $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ и прогнозных значений добычи нефти, полученные из разных источников информации, например, из проектных технологических документов на разработку месторождений; $\xi,\eta,\nu_l,l=1...d,\varepsilon$ – векторы случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями, представляющие погрешности измерения добычи нефти, ошибки, вызванные неадекватностью модели добычи нефти, ошибки дополнительных априорных сведений и экспертных оценок.

Рассмотрим решение задачи параметрической идентификации модели (1) с использованием комбинированного критерия качества

$$\Phi(\alpha,\beta) = \left\|Q_н^* - Q_н(\alpha)\right\|^2 + \left\|\bar{S} - s(T,\alpha)\right\|_{W_1}^2 + $$
$$+\sum_{l=1}^{d} W_{2l}(\bar{\alpha}_l - \alpha)^2 + \left\|\bar{Q}_н - \bar{f}_н(\alpha)\right\|_{W_3}^2 \qquad (2)$$

непараметрического метода аналогов [10] ,составленного из частных квадратичных критериев качества, где $\|X\|^2$ – норма X,

$$W_1 = \mathrm{diag}(K(\frac{s(T,\alpha^0) - \bar{s}_j}{\beta_1}), j = 1...p),$$

$$W_{2l} = \mathrm{diag}(K(\frac{\alpha_{jl}^0 - \bar{\alpha}_{jl}}{\beta_2}), j = 1...m),$$

$$W_3 = \mathrm{diag}(K(\frac{f(t_n+\tau_j,\alpha^0) - Q_н(t_n+\tau_j)}{\beta_3}), j = 1...r) -$$

диагональные матрицы весовых функций $K(u)$ с управляющими параметрами β_1,β_2,β_3, учитывающих значимость (вес) дополнительных априорных данных и экспертных оценок, $\alpha^0=(\alpha_1^0,\alpha_2^0,...\alpha_m^0)$ – вектор начальных приближений параметров модели добычи нефти.

Функции (ядра) $K(u)$ введены по аналогии с непараметрическими оценками плотности вероятности и регрессии, обладают следующими свойствами [12]:

$$K(x-u)/h) \to 1,\ h \to \infty;\ K(x-u)/h) \to 0,\ h \to 0.$$

Задача параметрической идентификации (1) сводится к решению оптимизационной задачи по определению вектора параметров модели добычи нефти

$$\alpha^*(\beta) = \arg\min_{\alpha} \Phi(\alpha,\beta) \qquad (3)$$

и оптимизационной задачи по определению вектора управляющих параметров

$$\beta^* = \arg\min_{\beta}(\left\|Q_н^* - Q_н(\alpha^*,\beta)\right\|^2), \qquad (4)$$

где $\arg\min_x f(x)$ обозначает точку минимума x^* функции $f(x)$.

Приведем решение оптимизационной задачи (3) с использованием метода Ньютона [13]:

$$\alpha^i = \alpha^{i-1} + h_i\Delta\alpha^{i-1},\ i = 1,2,3,..., \qquad (5)$$

где оценки приращений вектора параметров $\Delta\alpha^{i-1}$ на каждой итерации определяются путем решения системы линейных уравнений

$$A^{i-1}\Delta\alpha^{i-1} = B^{i-1}, \qquad (6)$$

где

$$A^{i-1} = (D_н^T D_н + D_s^T W_1 D_s + \sum_{j=1}^{d} W_{2j} + D_\tau^T W_3 D_\tau)^{i-1},$$

$$B^{i-1} = (D_н^T e_н + \bar{e}_s W_1 D_s^T + \sum_{l=1}^{d} W_{2j}\Delta\bar{\alpha}_l + \bar{e}_\tau \cdot W_3 D_\tau^T)^{i-1},$$

$$D_н = \left(\frac{\partial f(t_i,\alpha)}{\partial\alpha_j},\ i = 1...n,\ j = 1...m\right),$$

$$D_\tau = \left(\frac{\partial f(t_n+\tau_i,\alpha)}{\partial\alpha_j},\ i = 1...r,\ j = 1...m\right)$$

– матрицы частных производных; $D_s = \left(\frac{\partial s(T,\alpha)}{\partial\alpha_j}, j = 1...m\right)$ – вектор частных производных от функции извлекаемых запасов $s(T,\alpha)$; $e_н=(Q_н^*-Q_н)$, $\bar{e}_s=(\bar{S}-s(T,\alpha^0))$, $\Delta\bar{\alpha}_l=(\bar{\alpha}_l-\alpha_l^0)$, $\bar{e}_\tau=(\bar{Q}_н-Q(\tau,\alpha^0))$ – векторы невязок.

Для получения системы линейных уравнений (6) необходимо:

1. Разложить функции $f(t,\alpha)$, $s(T,\alpha)$ в ряд Тейлора и ограничиться членами первого порядка малости относительно приращения вектора параметров $\Delta\alpha^0$:

$$f(t,\alpha) \cong f(t,\alpha^0) + \sum_{j=1}^{m} (\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial \alpha_j})^0 \Delta\alpha_j^0,$$

$$s(T,\alpha) \cong s(T,\alpha^0) + \sum_{j=1}^{m} (\frac{\partial s(T,\alpha)}{\partial \alpha_j})^0 \Delta\alpha_j^0. \qquad (7)$$

2. Используя разложение (7) перейти от модели (1) к линейной интегрированной системе моделей добычи нефти относительно приращения вектора параметров $\Delta\alpha^0$:

$$\begin{cases} e_н^0 = D_н^0 \Delta\alpha^0 + \xi, \\ \bar{e}_s^0 = D_s^0 \Delta\alpha^0 + \eta, \\ \Delta\bar{\alpha}_l^0 = \Delta\alpha^0 + \nu_l, l = 1...d, \\ \bar{e}_\tau^0 = D_\tau^0 \Delta\alpha^0 + \varepsilon. \end{cases} \qquad (8)$$

3. Для модели (8) по аналоги с (2) составить комбинированный функционал качества

$$\Phi(\Delta\alpha^0) = \left\| e_н^0 - D_н^0 \Delta\alpha^0 \right\|^2 + \left\| \bar{e}_s^0 - D_s^0 \Delta\alpha^0 \right\|_{W_1}^2 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{d} W_{2l} (\Delta\bar{\alpha}_l^0 - \Delta\alpha^0)^2 + \left\| e_\tau^0 - D_\tau^0 \Delta\alpha^0 \right\|_{W_3}^2. \qquad (9)$$

4. Вычислить частные производные от функционала (9) по параметрам $\Delta\alpha^0$ и приравнять их к нулю

$$\frac{\partial \Phi(\Delta\alpha^0)}{\partial \Delta\alpha^0} = -(D_н^0)^T W_1 (e_н^0 - D_н^0 \Delta\alpha^0) -$$

$$-(D_s^0)^T W_1 (\bar{e}_s^0 - D_s^0 \Delta\alpha)) - \sum_{l=1}^{p} W_{2l} (\Delta\bar{\alpha}_l^0 - \Delta\alpha^0) -$$

$$-(D_\tau^0)^T W_3 (\bar{e}_{j\tau}^0 - D_\tau^0 \Delta\alpha^0) = 0. \qquad (10)$$

После проведения несложных преобразований из (10) следует система линейных уравнений (6).

Следует отметить, что для решения оптимизационной задачи (4) по определению вектора управляющих параметров целесообразно использовать методы оптимизации без вычисления производных [13].

Точность оценок прогноза добычи нефти и извлекаемых запасов

Рассмотрим вопросы точности алгоритмов прогнозирования добычи нефти и оценки извлекаемых запасов на примере интегрированной стохастической системы моделей (1), которую представим в удобном для статистического моделирования матричном виде:

$$\begin{cases} Q_н^* = Q_н(\alpha)(1 + c_1\xi), \\ \bar{S} = s(T,\alpha)(1 + c_2\eta), \\ \bar{\alpha}_l = \alpha(1 + c_3)\nu_l, l = 1...d, \\ \bar{Q}_н = Q(\tau,\alpha)(1 + c_4)\varepsilon, \end{cases} \qquad (11)$$

где $Q_н^*, \bar{S}, \bar{\alpha}_l, l=1...d, \bar{Q}_н$ – векторы имитируемых значений добычи нефти, дополнительных априорных данных и экспертных оценок извлекаемых запасов, параметров модели и прогнозных значений добычи, полученные с использованием функции регрессии [7, 10],

$$f(t,\alpha) = \alpha_1 \exp(-\alpha_2 t) \cdot t^{\alpha_3}, \qquad (12)$$

широко используемой при моделировании промысловых данных в качестве представления зависимости годовой добычи нефти от времени разработки; $\xi, \eta, \nu_l, l=1...d, \varepsilon$ – векторы случайных величин, полученные с использованием датчика псевдослучайных чисел, распределенных по нормальному закону с нулевыми средними значениями и единичной дисперсией; c_j, $j=1...4$ константы, представляющие относительный уровень ошибок.

Для определения точности оценок прогноза добычи нефти

$$Q_н^*(t_n + \tau) = f(t_n + \tau, \alpha^*(\beta^*)) \qquad (13)$$

и извлекаемых запасов

$$S^* = \int_0^T f(t, \alpha^*(\beta^*)) dt \qquad (14)$$

использованы их относительные ошибки

$$\delta_n(Q_н^*(t_n + \tau)) = \text{abs}(\frac{f(t_n + \tau, \alpha^*(\beta^*)) - f(t_n + \tau, \alpha)}{f(t_n + \tau, \alpha)}), \qquad (15)$$

$$\delta_n(S^*) = \text{abs}(\frac{s(T, \alpha^*(\beta^*) - s(T,\alpha))}{s(T,\alpha)}) \qquad (16)$$

в зависимости от длительности разработки $t_n=n$ (годы) при значениях параметров добычи нефти $\alpha_1=50000$, $\alpha_2=2{,}1$, $\alpha_3=0{,}26$. Здесь $\alpha^*(\beta^*)$ – оценки параметров модели добычи нефти (12), полученные по алгоритму (6). Для определения оптимальных значений управляющих параметров β^* (4) использован метод деформированного многогранника [13].

В табл. 1 приведены результаты расчета относительных ошибок прогноза добычи нефти (15) ($\tau=3$) и извлекаемых запасов (16) в зависимости от вида интегрированной модели добычи нефти (11) и уровня ошибок дополнительных априорных сведений. Для указания вида модели добычи нефти введены следующие обозначения: $\{Q_н^*\}$ – модель добычи нефти (априорная информация не учитывается); $\{Q_н^*, \bar{S}\}$, $\{Q_н^*, \bar{S}, \bar{\alpha}\}$, $\{Q_н^*, \bar{S}, \bar{\alpha}, \bar{Q}_н\}$ – интегрированные системы моделей с учетом экспертных оценок извлекаемых запасов, дополнительных данных о параметрах моделей и прогнозных значениях добычи нефти, для которых введены условные обозначения М1–М4.

Для оценок параметров α^* модели добычи нефти М1 и начальных приближений параметров α^0 в алгоритме (5) использован метод Гаусса-Ньютона [14]

$$\alpha^i = \alpha^{i-1} + h_i \Delta\alpha^{i-1}, \; i = 1,2,3,..., \qquad (17)$$

где на каждом шаге i решается система линейных уравнений вида

$$(D_н^T D_н)^{i-1} \cdot \Delta\alpha^{i-1} = (D_н^T e_н)^{i-1},$$

которая следует из (6) при $\beta_j=0$, $j=1...3$.

Уровни ошибок дополнительных априорных данных и экспертных оценок имитировались следующие: добыча нефти 5 % (c_1=0,05), извлекаемые запасы 2, 5 и 10 % (c_2=0,02; 0,05; 0,1), дополнительные априорные данные параметров модели добычи – 2 % (c_3=0,02), а ошибка прогноза добычи нефти равна 5 %, что соответствует приемлемым на практике уровням точности оценок. Длительность разработки составляла три года (n=3). Количество дополнительных данных и экспертных оценок в (11) для каждого типа данных равнялось трем (p=d=r=3). Вес дополнительных априорных данных и экспертных оценок при формировании матриц W_1, W_{2l}, W_3 (6) рассчитывался с использованием функции $K(x)$=exp($-x^2$).

В табл. 2, 3 приведены значения относительных ошибок прогноза добычи нефти (13) (τ=3) и извлекаемых запасов (14) в зависимости от числа лет разработки и вида интегрированной модели добычи нефти. Уровень ошибок имитируемых значений дополнительных данных об извлекаемых запасах и прогнозных значениях добычи составлял 5 %. Уровень ошибок имитируемых значений дополнительных априорных сведений о параметрах модели добычи нефти составлял 2 %.

Таблица 1. *Относительные ошибки оценок прогноза добычи нефти и извлекаемых запасов, %*

Оценки	Вид интегрированной модели добычи нефти									
	1	2			3			4		
	М1	М2			М3			М4		
		Уровень ошибок экспертных оценок извлекаемых запасов								
		2	5	10	2	5	10	2	5	10
Прогноз добычи	53	2,6	3,2	5,1	2,2	2,8	4,5	1,9	2,3	3,1
Извлекаемые запасы	49	2,3	3,1	4.6	1,8	2,6	3,5	1,4	2,2	2,8

Таблица 2. *Относительная ошибка оценок прогноза добычи нефти, %*

Модели добычи нефти	Длительность разработки (номер года)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
М1	–	–	53	42	23	16,1	11,3	8,7	6,9	5,3
М2	51	39	23	15,6	12,4	9,7	7,1	5,6	4,8	4,2
М3	45	34	19	13,6	9,7	7,4	5,2	4,7	4,1	3,6
М4	26	14	8,4	6,9	5,2	3,9	3,1	2,6	2,3	2,1

Таблица 3. *Относительная ошибка оценок извлекаемых запасов, %*

Модели добычи нефти	Длительность разработки (номер года)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
М1	–	–	49	37	21	14,6	9,3	7,2	5,7	4,9
М2	46	34	20	15,6	11,6	9,5	7,2	5,9	4,6	3,8
М3	40	20	17	12,3	10,2	8,1	5,9	5,2	4,6	3,3
М4	25	13	8,8	6,5	5,1	3,7	3,2	2,8	2,3	1,9

Из табл. 1–3 видно, что учет дополнительных априорных данных и экспертных оценок приводит к существенному увеличению точности оценок прогноза добычи нефти и извлекаемых запасов на ранних стадиях разработки месторождения (3–6 лет) по сравнению с оценками (17) на основе модели добычи нефти М1, где априорная информация не учитывается. Например, относительная ошибка извлекаемых запасов, полученная к третьему году разработки с использованием метода Гаусса-Ньютона (17), составляет 49 % (табл. 3), а с использованием метода интегрированных моделей с учетом априорной информации (5) порядка 9 %.

Приведем результаты прогноза добычи нефти с использованием фактических промысловых данных годовой добычи нефти одного из месторождений Тюменской области за 15 лет его разработки с 1990 г., изображенных на рисунке (линия 1). Линия 2 представляет прогнозные значения добычи нефти (13) по данным трех лет разработки n=3 и τ=1,2,...,12, полученные с использованием модели (12) и алгоритма (17). Линия 3 отражает прогноз добычи нефти, с использованием дополнительной априорной информации об извлекаемых запасах 6,3 млн т, рассчитанных до начала разработки месторождения.

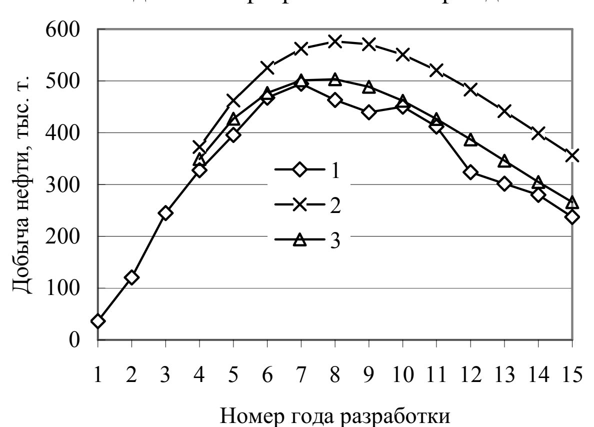


Рисунок. *Фактические значения добычи нефти (линия 1), прогнозные значения добычи с использованием модели М1 и М2 (линии 2, 3)*

В табл. 4 отражены значения относительных ошибок прогноза добычи нефти, начиная с четвертого года разработки месторождения, полученные с использованием модели М1, алгоритма (17) и модели добычи нефти с учетом априорной информации об извлекаемых запасах М2 и алгоритма (5).

Таблица 4. *Относительная ошибка оценок прогноза добычи нефти, %*

Модели добычи нефти	Длительность разработки (номер года)											
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
М1	14	11	9	8,5	7,4	4	3	2,9	2,5	1,8	1,7	1,6
М2	6	4,4	3,8	4,1	3,6	2,5	1,8	2,1	1,9	1,1	0,9	0,8

Из рисунка и табл. 4 видно, что использование дополнительных априорных данных об извлекаемых запасах позволяет существенно повысить точность прогноза добычи нефти на ранней (первой) стадии разработки месторождения.

Выводы

Предложенные интегрированные модели добычи нефти и алгоритмы идентификации позволяют:

1) учитывать дополнительные априорные данные и экспертные оценки технологических параметров разработки месторождений: извлекаемые запасы, прогнозные значения добычи нефти, параметры модели добычи нефти и т. п.;
2) получать оценки прогноза добычи нефти и извлекаемых запасов в условиях априорной неопределенности о статистических характеристиках ошибок дополнительных априорных сведений и экспертных оценок;
3) значительно, в два раза и более, повысить точность оценок прогноза добычи нефти и извлекаемых запасов при малом объеме промысловых данных на ранней (первой) стадии разработки месторождения в течение первых пяти лет по сравнению с оценками метода Гаусса-Ньютона, где априорная информация не учитывается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Этюды о моделировании сложных систем нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неоднородность. – Уфа: Гилем, 1999. – 462 с.
2. Булыгин В.Я., Булыгин Д.В. Имитация разработки залежей нефти. – М.: Недра, 1990. – 240 с.
3. Костюченко С.В., Ямпольский В.З. Мониторинг и моделирование нефтяных месторождений. – Томск: Изд-во НТЛ, 2000. – 246 с.
4. Хургин Я.И. Проблемы неопределенности в задачах нефти и газа. – М.-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2004. – 320 с.
5. Севостьянов Д.В., Сергеев В.Л. Интегрированные системы идентификации показателей разработки нефтяных месторождений // Доклады ТУСУР. – 2004. – № 2 (10). – С. 87–93.
6. Регламент составления проектно технологических документов на разработку нефтяных и газонефтяных месторождений. РД 153-39-007-95. – М.: ВНИИОЭНГ, 1996. – 202 с.
7. Шахвердиев А.Х. Унифицированная методика расчета эффективности геолого-технических мероприятий // Нефтяное хозяйство. – 2001. – № 5. – С. 44–48.
8. Пьянков В.Н. Алгоритмы идентификации параметров модели Баклея-Леверетта в задачах прогноза добычи нефти // Нефтяное хозяйство. – 1997. – № 10. – С. 62–65.
9. Сергеев В.Л. Интегрированные системы идентификации. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 240 с.
10. Сергеев В.Л. Идентификация систем с учетом априорной информации. – Томск: Изд-во НТЛ, 1999. – 146 с.
11. Кориков А.М., Севостьянов Д.В., Сергеев В.Л., Сергеев П.В. Адаптивные интегрированные системы идентификации и управления: Вопросы проектирования и развития // Электронные средства и системы управления: Труды Междунар. научно-практ. конф. – Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2005. – Т. 2. – С. 58–61.
12. Тарасенко Ф.П. Непараметрическая статистика. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 1975. – 292 с.
13. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2002. – 544 с.
14. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 300 с.

УДК 622.692